

Supplementary Materials

Estimation and Optimal Censoring Plan for A New Unit Log-Log Model Via Improved Adaptive Progressively Censored Data

Refah Alotaibi¹, Mazen Nassar^{2,3*} and Ahmed Elshahhat⁴

¹Department of Mathematical Sciences , College of Science, Princess Nourah bint Abdulrahman University,

P.O. Box 84428, Riyadh 11671, Saudi Arabia

²Department of Statistics, Faculty of Science, King Abdulaziz University, Jeddah 21589, Kingdom of Saudi Arabia

³Department of Statistics, Faculty of Commerce, Zagazig University, Egypt

⁴Faculty of Technology and Development, Zagazig University, Zagazig 44519, Egypt

Table S1: Av.Es (1st column), RMSEs (2nd column) and MABs (3rd column) of γ when $(T_1, T_2) = (0.2, 0.3)$.

n [FP%] Prior \rightarrow	Test	MLE			MCMC					
					Pr.A			Pr.B		
40[50%]	1	0.7900	0.2155	0.1970	0.5867	0.1840	0.1741	0.7723	0.1407	0.1415
	2	0.8026	0.1916	0.1875	0.6563	0.1601	0.1662	0.8150	0.1352	0.1316
	3	0.8246	0.1746	0.1746	0.8364	0.1572	0.1461	0.6900	0.1218	0.1241
	4	0.7625	0.1625	0.1574	0.6380	0.1464	0.1395	0.7729	0.1135	0.0896
	5	0.7723	0.1526	0.1471	0.7492	0.1345	0.1269	0.7845	0.1086	0.0850
40[75%]	6	0.7750	0.1456	0.1384	0.8216	0.1331	0.1217	0.8208	0.0931	0.0767
	7	0.7791	0.1415	0.1275	0.7119	0.1312	0.1187	0.7402	0.0894	0.0712
	8	0.7608	0.1327	0.1176	0.7055	0.1237	0.1064	0.8581	0.0802	0.0644
	9	0.7665	0.1249	0.1108	0.8362	0.1185	0.0974	0.7761	0.0739	0.0605
	10	0.7760	0.1225	0.1075	0.7281	0.1140	0.0934	0.7427	0.0706	0.0540
80[50%]	1	0.7785	0.1160	0.1030	0.6402	0.1100	0.0903	0.8076	0.0616	0.0499
	2	0.7774	0.1108	0.0946	0.6423	0.1080	0.0881	0.6046	0.0584	0.0439
	3	0.7528	0.1085	0.0912	0.6584	0.1070	0.0859	0.7618	0.0499	0.0387
	4	0.7465	0.1060	0.0887	0.7494	0.1049	0.0841	0.7517	0.0460	0.0341
	5	0.7526	0.1034	0.0834	0.7792	0.0940	0.0793	0.7948	0.0433	0.0299
80[75%]	6	0.7630	0.1000	0.0807	0.7706	0.0907	0.0776	0.8228	0.0359	0.0248
	7	0.7629	0.0977	0.0800	0.8026	0.0848	0.0773	0.7425	0.0331	0.0225
	8	0.7507	0.0898	0.0783	0.7376	0.0784	0.0738	0.7906	0.0289	0.0204
	9	0.7594	0.0875	0.0749	0.7877	0.0731	0.0717	0.7462	0.0270	0.0177
	10	0.7701	0.0840	0.0712	0.8092	0.0680	0.0651	0.8321	0.0215	0.0147

*Email: mmohamad3@kau.edu.sa; mezo10011@gmail.com

Table S2: Av.Es (1^{st} column), RMSEs (2^{nd} column) and MABs (3^{rd} column) of γ when $(T_1, T_2) = (0.4, 0.6)$.

n [FP%]	Test	MLE			MCMC					
Prior \rightarrow					Pr.A			Pr.B		
40[50%]	1	0.7770	0.2244	0.1853	0.7487	0.1798	0.1649	0.8590	0.1251	0.1123
	2	0.7873	0.2068	0.1741	0.8231	0.1543	0.1515	0.8386	0.1169	0.1081
	3	0.8197	0.1866	0.1630	0.7230	0.1461	0.1419	0.7739	0.1012	0.0821
	4	0.9454	0.1543	0.1473	0.8921	0.1367	0.1260	0.7509	0.0916	0.0757
	5	0.7800	0.1452	0.1306	0.8400	0.1324	0.1213	0.8065	0.0817	0.0716
40[75%]	6	0.7697	0.1421	0.1276	0.7457	0.1269	0.1159	0.7583	0.0726	0.0654
	7	0.7700	0.1394	0.1207	0.8346	0.1259	0.1087	0.8816	0.0688	0.0622
	8	0.7893	0.1263	0.1152	0.7840	0.1230	0.1034	0.7430	0.0615	0.0585
	9	0.7506	0.1193	0.1060	0.8360	0.1125	0.0917	0.7793	0.0571	0.0542
	10	0.7643	0.1154	0.1027	0.7691	0.1110	0.0863	0.7723	0.0530	0.0489
80[50%]	1	0.7624	0.1135	0.0985	0.7270	0.1094	0.0816	0.7874	0.0476	0.0432
	2	0.7709	0.1083	0.0883	0.7890	0.1051	0.0790	0.7826	0.0461	0.0405
	3	0.8148	0.1069	0.0824	0.8381	0.1039	0.0736	0.7893	0.0389	0.0379
	4	0.8600	0.1051	0.0802	0.8958	0.0971	0.0683	0.7724	0.0341	0.0328
	5	0.7576	0.1036	0.0792	0.7693	0.0895	0.0659	0.8913	0.0323	0.0285
80[75%]	6	0.7534	0.0977	0.0792	0.7168	0.0835	0.0684	0.7067	0.0305	0.0226
	7	0.7644	0.0880	0.0752	0.7307	0.0803	0.0617	0.8010	0.0276	0.0222
	8	0.7355	0.0864	0.0713	0.5897	0.0751	0.0587	0.6750	0.0245	0.0183
	9	0.7423	0.0838	0.0681	0.7444	0.0711	0.0564	0.7545	0.0213	0.0172
	10	0.7638	0.0816	0.0645	0.7434	0.0647	0.0514	0.7275	0.0200	0.0135

Table S3: Av.Es (1^{st} column), RMSEs (2^{nd} column) and MABs (3^{rd} column) of σ when $(T_1, T_2) = (0.2, 0.3)$.

n [FP%]	Test	MLE			MCMC					
Prior \rightarrow					Pr.A			Pr.B		
40[50%]	1	1.4959	0.2137	0.1918	1.7358	0.1529	0.1641	1.4717	0.1363	0.1119
	2	1.4872	0.1930	0.1861	1.7978	0.1412	0.1517	1.5592	0.1305	0.1009
	3	1.4723	0.1743	0.1742	1.4443	0.1350	0.1426	1.5640	0.1243	0.0955
	4	1.5246	0.1636	0.1701	1.6258	0.1294	0.1396	1.4148	0.1123	0.0847
	5	1.5089	0.1573	0.1670	1.5736	0.1242	0.1345	1.5733	0.1070	0.0785
40[75%]	6	1.5046	0.1475	0.1615	1.4294	0.1218	0.1234	1.4367	0.1008	0.0733
	7	1.5002	0.1419	0.1535	1.6637	0.1194	0.1204	1.5428	0.0969	0.0673
	8	1.5187	0.1372	0.1431	1.5466	0.1146	0.1148	1.3991	0.0949	0.0626
	9	1.5118	0.1316	0.1368	1.4652	0.1135	0.1084	1.4839	0.0826	0.0606
	10	1.5031	0.1268	0.1276	1.6233	0.1109	0.0997	1.5783	0.0794	0.0583
80[50%]	1	1.4985	0.1225	0.1196	1.6559	0.1090	0.0891	1.4551	0.0737	0.0471
	2	1.4017	0.1181	0.1136	1.3949	0.1044	0.0850	1.4295	0.0708	0.0452
	3	1.5204	0.1171	0.1091	1.6181	0.0987	0.0800	1.4927	0.0670	0.0436
	4	1.5217	0.1144	0.1027	1.6497	0.0971	0.0781	1.5327	0.0634	0.0416
	5	1.5149	0.1084	0.0936	1.5328	0.0951	0.0752	1.5435	0.0605	0.0368
80[75%]	6	1.5054	0.1056	0.0879	1.5319	0.0936	0.0736	1.4932	0.0573	0.0336
	7	1.5080	0.1024	0.0812	1.4699	0.0905	0.0716	1.5183	0.0538	0.0306
	8	1.5162	0.0892	0.0762	1.5164	0.0859	0.0706	1.4476	0.0504	0.0270
	9	1.5089	0.0864	0.0711	1.5176	0.0801	0.0673	1.5671	0.0450	0.0228
	10	1.4994	0.0829	0.0664	1.5661	0.0725	0.0637	1.5335	0.0393	0.0198

Table S4: Av.Es (1^{st} column), RMSEs (2^{nd} column) and MABs (3^{rd} column) of σ when $(T_1, T_2) = (0.4, 0.6)$.

n [FP%]	Test	MLE			MCMC					
Prior \rightarrow					Pr.A			Pr.B		
40[50%]	1	1.5076	0.2037	0.1879	1.5837	0.1460	0.1580	1.4467	0.1037	0.0927
	2	1.4984	0.1868	0.1805	1.4783	0.1345	0.1477	1.4606	0.0975	0.0863
	3	1.4592	0.1692	0.1636	1.5958	0.1294	0.1378	1.5159	0.0931	0.0778
	4	1.3811	0.1566	0.1553	1.3035	0.1184	0.1245	1.4653	0.0839	0.0772
	5	1.5060	0.1513	0.1419	1.3891	0.1133	0.1163	1.4669	0.0784	0.0683
40[75%]	6	1.5070	0.1383	0.1295	1.5352	0.1094	0.1099	1.5127	0.0711	0.0626
	7	1.5041	0.1317	0.1253	1.4613	0.1040	0.0959	1.4154	0.0671	0.0584
	8	1.4963	0.1290	0.1214	1.4983	0.0977	0.0929	1.5479	0.0631	0.0511
	9	1.5196	0.1239	0.1167	1.5828	0.0921	0.0908	1.5395	0.0582	0.0466
	10	1.5113	0.1124	0.1109	1.5475	0.0893	0.0901	1.5194	0.0569	0.0442
80[50%]	1	1.5069	0.1080	0.1084	1.5416	0.0851	0.0852	1.4655	0.0528	0.0415
	2	1.4985	0.1051	0.1022	1.5335	0.0818	0.0818	1.5387	0.0470	0.0403
	3	1.4556	0.1020	0.0980	1.3808	0.0797	0.0765	1.4073	0.0446	0.0355
	4	1.4267	0.1002	0.0950	1.3175	0.0782	0.0738	1.4737	0.0393	0.0331
	5	1.5115	0.0962	0.0915	1.5513	0.0736	0.0695	1.4248	0.0364	0.0313
80[75%]	6	1.5120	0.0916	0.0824	1.4491	0.0717	0.0680	1.4838	0.0343	0.0282
	7	1.5021	0.0886	0.0779	1.5049	0.0692	0.0641	1.4318	0.0324	0.0249
	8	1.5299	0.0849	0.0730	1.7141	0.0643	0.0595	1.5772	0.0294	0.0239
	9	1.5180	0.0816	0.0684	1.4787	0.0590	0.0588	1.5034	0.0265	0.0214
	10	1.5017	0.0797	0.0626	1.5064	0.0574	0.0570	1.5312	0.0250	0.0181

Table S5: Av.Es (1^{st} column), RMSEs (2^{nd} column) and MABs (3^{rd} column) of $R(t)$ when $(T_1, T_2) = (0.2, 0.3)$.

n [FP%]	Test	MLE			MCMC					
Prior \rightarrow					Pr.A			Pr.B		
40[50%]	1	0.4840	0.1523	0.1284	0.6031	0.1147	0.1133	0.4745	0.0742	0.0872
	2	0.4808	0.1478	0.1206	0.6484	0.1086	0.1097	0.5437	0.0717	0.0807
	3	0.4634	0.1331	0.1137	0.4520	0.0955	0.0919	0.5271	0.0676	0.0786
	4	0.5026	0.1242	0.0984	0.5469	0.0810	0.0853	0.4299	0.0659	0.0737
	5	0.4939	0.1154	0.0946	0.5387	0.0768	0.0821	0.5487	0.0606	0.0703
40[75%]	6	0.4920	0.1082	0.0850	0.4448	0.0737	0.0776	0.4526	0.0577	0.0641
	7	0.4894	0.0995	0.0822	0.5886	0.0709	0.0753	0.5209	0.0566	0.0615
	8	0.5020	0.0909	0.0786	0.5130	0.0684	0.0711	0.4282	0.0529	0.0571
	9	0.4967	0.0851	0.0760	0.4711	0.0647	0.0690	0.4844	0.0475	0.0541
	10	0.4916	0.0801	0.0676	0.5679	0.0624	0.0668	0.5448	0.0439	0.0513
80[50%]	1	0.4881	0.0748	0.0621	0.5710	0.0605	0.0621	0.4668	0.0434	0.0485
	2	0.2328	0.0726	0.0595	0.2261	0.0601	0.0589	0.0854	0.0423	0.0458
	3	0.4989	0.0722	0.0585	0.5531	0.0579	0.0549	0.4887	0.0401	0.0454
	4	0.5026	0.0683	0.0547	0.5860	0.0550	0.0520	0.5153	0.0373	0.0434
	5	0.4984	0.0652	0.0532	0.5149	0.0535	0.0475	0.5296	0.0308	0.0404
80[75%]	6	0.4935	0.0608	0.0487	0.5127	0.0523	0.0472	0.4980	0.0280	0.0367
	7	0.4955	0.0577	0.0479	0.4746	0.0506	0.0453	0.5045	0.0242	0.0332
	8	0.5011	0.0529	0.0423	0.4988	0.0490	0.0426	0.4584	0.0220	0.0291
	9	0.4964	0.0510	0.0411	0.5065	0.0475	0.0404	0.5382	0.0205	0.0244
	10	0.4901	0.0490	0.0389	0.5430	0.0454	0.0368	0.5286	0.0190	0.0203

Table S6: Av.Es (1^{st} column), RMSEs (2^{nd} column) and MABs (3^{rd} column) of $R(t)$ when $(T_1, T_2) = (0.4, 0.6)$.

n [FP%]	Test	MLE			MCMC					
Prior \rightarrow					Pr.A			Pr.B		
40[50%]	1	0.4923	0.1467	0.1240	0.5365	0.1131	0.1030	0.4669	0.0705	0.0841
	2	0.4886	0.1361	0.1193	0.4811	0.0831	0.0962	0.4755	0.0688	0.0754
	3	0.4655	0.1270	0.1077	0.5471	0.0797	0.0868	0.5075	0.0662	0.0729
	4	0.4013	0.1188	0.0880	0.3508	0.0771	0.0811	0.4654	0.0635	0.0707
	5	0.4905	0.1086	0.0845	0.4247	0.0738	0.0759	0.4753	0.0615	0.0674
40[75%]	6	0.4946	0.1016	0.0821	0.5124	0.0710	0.0683	0.5028	0.0569	0.0629
	7	0.4928	0.0886	0.0780	0.4707	0.0682	0.0628	0.4436	0.0541	0.0579
	8	0.4817	0.0839	0.0748	0.4905	0.0674	0.0602	0.5250	0.0509	0.0534
	9	0.5013	0.0792	0.0701	0.5585	0.0632	0.0580	0.5246	0.0440	0.0513
	10	0.4972	0.0757	0.0657	0.5232	0.0611	0.0553	0.5096	0.0408	0.0493
80[50%]	1	0.4938	0.0726	0.0605	0.5147	0.0586	0.0533	0.4713	0.0371	0.0478
	2	0.4891	0.0679	0.0578	0.5157	0.0569	0.0522	0.5247	0.0363	0.0427
	3	0.4639	0.0654	0.0554	0.4065	0.0543	0.0470	0.4260	0.0328	0.0416
	4	0.4367	0.0632	0.0517	0.3669	0.0526	0.0459	0.4761	0.0287	0.0402
	5	0.4959	0.0611	0.0492	0.5252	0.0506	0.0448	0.4524	0.0253	0.0382
80[75%]	6	0.4978	0.0581	0.0459	0.4477	0.0501	0.0439	0.4746	0.0242	0.0350
	7	0.4927	0.0549	0.0425	0.4898	0.0487	0.0414	0.4477	0.0221	0.0319
	8	0.5063	0.0515	0.0405	0.6004	0.0451	0.0371	0.5341	0.0211	0.0283
	9	0.5009	0.0486	0.0387	0.4734	0.0420	0.0350	0.4955	0.0184	0.0216
	10	0.4921	0.0475	0.0377	0.4924	0.0402	0.0331	0.5115	0.0164	0.0171

Table S7: Av.Es (1^{st} column), RMSEs (2^{nd} column) and MABs (3^{rd} column) of $h(t)$ when $(T_1, T_2) = (0.2, 0.3)$.

n [FP%]	Test	MLE			MCMC					
Prior \rightarrow					Pr.A			Pr.B		
40[50%]	1	1.9584	0.1783	0.1820	1.8259	0.1695	0.1624	1.9553	0.1355	0.0963
	2	1.9726	0.1695	0.1731	1.9582	0.1661	0.1566	2.1081	0.1282	0.0877
	3	1.9389	0.1657	0.1650	1.9635	0.1615	0.1535	1.9175	0.1235	0.0842
	4	1.9548	0.1620	0.1600	1.8415	0.1573	0.1494	1.8840	0.1148	0.0790
	5	1.9598	0.1563	0.1518	2.0010	0.1474	0.1414	2.0734	0.1071	0.0760
40[75%]	6	1.9635	0.1492	0.1468	1.9552	0.1384	0.1335	1.9747	0.0965	0.0733
	7	1.9643	0.1398	0.1358	2.0014	0.1327	0.1282	1.9782	0.0871	0.0722
	8	1.9657	0.1286	0.1232	1.9082	0.1220	0.1174	1.9789	0.0810	0.0702
	9	1.9619	0.1235	0.1108	2.0037	0.1150	0.1073	1.9751	0.0749	0.0682
	10	1.9652	0.1179	0.1015	2.0068	0.1094	0.0929	2.0098	0.0726	0.0673
80[50%]	1	1.9613	0.1097	0.0989	1.8824	0.1020	0.0829	1.9867	0.0675	0.0561
	2	1.8995	0.1041	0.0937	1.8742	0.0977	0.0763	1.1673	0.0624	0.0530
	3	1.9393	0.1093	0.0896	1.8941	0.0912	0.0726	1.9636	0.0590	0.0511
	4	1.9480	0.1007	0.0863	2.0518	0.0863	0.0679	1.9859	0.0534	0.0481
	5	1.9502	0.0973	0.0805	2.0067	0.0808	0.0615	2.0621	0.0479	0.0442
80[75%]	6	1.9578	0.0919	0.0771	1.9930	0.0755	0.0572	2.0550	0.0459	0.0418
	7	1.9606	0.0876	0.0714	1.9834	0.0717	0.0545	1.9606	0.0418	0.0395
	8	1.9576	0.0821	0.0659	1.9359	0.0697	0.0518	1.9520	0.0389	0.0373
	9	1.9603	0.0746	0.0593	2.0093	0.0647	0.0482	2.0077	0.0365	0.0360
	10	1.9620	0.0699	0.0551	2.0873	0.0624	0.0458	2.1112	0.0329	0.0323

Table S8: Av.Es (1^{st} column), RMSEs (2^{nd} column) and MABs (3^{rd} column) of $h(t)$ when $(T_1, T_2) = (0.4, 0.6)$.

n [FP%]	Test	MLE			MCMC					
Prior \rightarrow					Pr.A			Pr.B		
40[50%]	1	1.9599	0.1534	0.1716	1.9721	0.1326	0.1432	2.0481	0.1239	0.0825
	2	1.9707	0.1467	0.1534	2.0116	0.1248	0.1324	2.0391	0.1183	0.0802
	3	1.9795	0.1414	0.1422	1.9712	0.1187	0.1262	2.0057	0.1094	0.0789
	4	1.9470	0.1350	0.1339	1.9291	0.1099	0.1187	1.9117	0.1041	0.0765
	5	1.9560	0.1286	0.1219	2.0451	0.1006	0.1083	1.9976	0.0975	0.0737
40[75%]	6	1.9653	0.1183	0.1143	1.9634	0.0949	0.0981	1.9784	0.0950	0.0720
	7	1.9635	0.1124	0.1083	2.0114	0.0888	0.0875	2.0305	0.0841	0.0682
	8	1.9386	0.1065	0.0982	1.9782	0.0842	0.0843	1.9880	0.0754	0.0640
	9	1.9513	0.1023	0.0831	2.1437	0.0780	0.0763	2.0352	0.0689	0.0603
	10	1.9627	0.0998	0.0806	2.0041	0.0751	0.0726	2.0062	0.0630	0.0576
80[50%]	1	1.9555	0.0974	0.0772	1.9434	0.0722	0.0653	1.9666	0.0615	0.0542
	2	1.9591	0.0913	0.0736	2.0182	0.0676	0.0632	2.0402	0.0595	0.0510
	3	1.9773	0.0884	0.0683	1.9033	0.0629	0.0606	1.8960	0.0566	0.0453
	4	1.9508	0.0842	0.0627	1.9754	0.0573	0.0587	1.9575	0.0483	0.0415
	5	1.9503	0.0813	0.0609	2.0056	0.0538	0.0565	2.0573	0.0416	0.0351
80[75%]	6	1.9546	0.0780	0.0580	1.8414	0.0459	0.0534	1.8747	0.0405	0.0317
	7	1.9627	0.0736	0.0568	1.9154	0.0440	0.0509	1.9477	0.0382	0.0294
	8	1.9370	0.0703	0.0565	1.8447	0.0403	0.0481	1.9069	0.0349	0.0273
	9	1.9453	0.0656	0.0523	1.9116	0.0385	0.0453	1.9634	0.0316	0.0243
	10	1.9603	0.0641	0.0503	1.9345	0.0355	0.0412	1.9509	0.0302	0.0219

Table S9: The ACWs (1^{st} column) and CPs (2^{nd} column) of 95% ACI/HPD intervals of γ when $(T_1, T_2) = (0.2, 0.3)$.

n [FP%]	Test	ACI		HPD			
Prior \rightarrow				Pr.A		Pr.B	
40[50%]	1	0.566	0.942	0.507	0.950	0.365	0.955
	2	0.558	0.945	0.482	0.954	0.348	0.958
	3	0.530	0.949	0.456	0.958	0.334	0.961
	4	0.521	0.951	0.442	0.960	0.323	0.963
	5	0.512	0.952	0.424	0.961	0.313	0.964
40[75%]	6	0.502	0.953	0.419	0.962	0.290	0.966
	7	0.488	0.955	0.384	0.964	0.283	0.967
	8	0.478	0.956	0.370	0.965	0.278	0.968
	9	0.464	0.957	0.360	0.966	0.267	0.969
	10	0.453	0.959	0.354	0.968	0.260	0.971
80[50%]	1	0.445	0.961	0.345	0.970	0.257	0.972
	2	0.436	0.962	0.338	0.971	0.249	0.975
	3	0.428	0.963	0.327	0.972	0.245	0.976
	4	0.414	0.965	0.317	0.974	0.239	0.978
	5	0.404	0.966	0.306	0.975	0.235	0.979
80[75%]	6	0.391	0.967	0.295	0.977	0.228	0.980
	7	0.385	0.968	0.282	0.978	0.222	0.981
	8	0.373	0.970	0.277	0.979	0.212	0.983
	9	0.364	0.971	0.268	0.980	0.195	0.984
	10	0.350	0.972	0.255	0.981	0.184	0.985

Table S10: The ACWs (1^{st} column) and CPs (2^{nd} column) of 95% ACI/HPD intervals of γ when $(T_1, T_2) = (0.4, 0.6)$.

n [FP%] Prior \rightarrow	Test	ACI		HPD			
				Pr.A		Pr.B	
40[50%]	1	0.549	0.947	0.487	0.955	0.356	0.959
	2	0.533	0.950	0.467	0.958	0.339	0.962
	3	0.484	0.952	0.445	0.961	0.328	0.964
	4	0.464	0.955	0.436	0.963	0.316	0.966
	5	0.459	0.957	0.427	0.965	0.294	0.968
40[75%]	1	0.431	0.959	0.413	0.966	0.283	0.970
	2	0.421	0.960	0.378	0.968	0.278	0.971
	3	0.415	0.961	0.367	0.969	0.264	0.973
	4	0.401	0.962	0.358	0.970	0.247	0.975
	5	0.384	0.964	0.349	0.972	0.231	0.976
80[50%]	1	0.379	0.966	0.336	0.974	0.251	0.978
	2	0.371	0.967	0.326	0.976	0.241	0.979
	3	0.365	0.968	0.316	0.977	0.235	0.980
	4	0.353	0.970	0.310	0.979	0.229	0.982
	5	0.345	0.971	0.301	0.980	0.213	0.983
80[75%]	1	0.335	0.972	0.289	0.981	0.206	0.984
	2	0.324	0.973	0.280	0.982	0.198	0.985
	3	0.313	0.975	0.270	0.983	0.190	0.987
	4	0.302	0.976	0.259	0.983	0.183	0.988
	5	0.293	0.976	0.247	0.985	0.160	0.989

Table S11: The ACWs (1^{st} column) and CPs (2^{nd} column) of 95% ACI/HPD intervals of σ when $(T_1, T_2) = (0.2, 0.3)$.

n [FP%] Prior \rightarrow	Test	ACI		HPD			
				Pr.A		Pr.B	
40[50%]	1	0.554	0.937	0.519	0.940	0.358	0.949
	2	0.538	0.939	0.507	0.942	0.325	0.951
	3	0.522	0.941	0.490	0.944	0.317	0.953
	4	0.515	0.942	0.476	0.945	0.310	0.954
	5	0.504	0.943	0.464	0.946	0.284	0.956
40[75%]	6	0.483	0.946	0.455	0.949	0.270	0.958
	7	0.476	0.948	0.446	0.951	0.262	0.960
	8	0.463	0.950	0.424	0.953	0.254	0.963
	9	0.452	0.951	0.414	0.954	0.243	0.964
	10	0.443	0.953	0.406	0.956	0.238	0.965
80[50%]	1	0.434	0.954	0.400	0.957	0.227	0.966
	2	0.427	0.955	0.395	0.958	0.216	0.967
	3	0.413	0.956	0.386	0.959	0.196	0.969
	4	0.402	0.958	0.372	0.961	0.182	0.971
	5	0.390	0.960	0.351	0.963	0.175	0.973
80[75%]	6	0.381	0.961	0.338	0.965	0.169	0.975
	7	0.373	0.962	0.318	0.967	0.161	0.976
	8	0.365	0.964	0.299	0.969	0.156	0.977
	9	0.359	0.965	0.293	0.969	0.148	0.979
	10	0.345	0.967	0.287	0.970	0.135	0.980

Table S12: The ACWs (1^{st} column) and CPs (2^{nd} column) of 95% ACI/HPD intervals of σ when $(T_1, T_2) = (0.4, 0.6)$.

n [FP%]	Test	ACI		HPD			
Prior \rightarrow				Pr.A		Pr.B	
40[50%]	1	0.547	0.941	0.494	0.944	0.352	0.952
	2	0.532	0.943	0.478	0.946	0.323	0.955
	3	0.518	0.944	0.469	0.947	0.315	0.956
	4	0.507	0.945	0.454	0.948	0.304	0.957
	5	0.490	0.947	0.439	0.951	0.288	0.960
40[75%]	6	0.476	0.949	0.417	0.952	0.265	0.961
	7	0.463	0.951	0.406	0.954	0.254	0.963
	8	0.452	0.953	0.395	0.956	0.238	0.965
	9	0.433	0.955	0.388	0.958	0.221	0.967
	10	0.428	0.957	0.373	0.960	0.219	0.968
80[50%]	1	0.422	0.958	0.363	0.961	0.212	0.968
	2	0.419	0.959	0.359	0.962	0.205	0.970
	3	0.399	0.961	0.349	0.963	0.192	0.971
	4	0.386	0.962	0.336	0.965	0.176	0.972
	5	0.378	0.963	0.324	0.966	0.168	0.976
80[75%]	6	0.365	0.965	0.319	0.968	0.161	0.977
	7	0.355	0.966	0.308	0.969	0.155	0.979
	8	0.334	0.968	0.287	0.971	0.144	0.980
	9	0.323	0.969	0.277	0.972	0.138	0.981
	10	0.317	0.971	0.264	0.975	0.131	0.982

Table S13: The ACWs (1^{st} column) and CPs (2^{nd} column) of 95% ACI/HPD intervals of $R(t)$ when $(T_1, T_2) = (0.2, 0.3)$.

n [FP%]	Test	ACI		HPD			
Prior \rightarrow				Pr.A		Pr.B	
40[50%]	1	0.368	0.953	0.338	0.957	0.305	0.962
	2	0.336	0.956	0.313	0.960	0.291	0.964
	3	0.313	0.958	0.282	0.962	0.272	0.965
	4	0.294	0.960	0.272	0.964	0.257	0.967
	5	0.284	0.961	0.266	0.965	0.248	0.969
40[75%]	6	0.277	0.963	0.261	0.966	0.241	0.970
	7	0.271	0.963	0.254	0.967	0.232	0.972
	8	0.268	0.964	0.249	0.968	0.228	0.973
	9	0.263	0.965	0.242	0.969	0.218	0.974
	10	0.258	0.966	0.238	0.970	0.213	0.974
80[50%]	1	0.253	0.967	0.235	0.970	0.208	0.975
	2	0.246	0.969	0.230	0.972	0.203	0.975
	3	0.238	0.970	0.227	0.973	0.199	0.976
	4	0.234	0.970	0.221	0.973	0.181	0.977
	5	0.230	0.971	0.215	0.974	0.175	0.979
80[75%]	6	0.226	0.972	0.206	0.975	0.166	0.980
	7	0.221	0.973	0.200	0.975	0.155	0.981
	8	0.217	0.974	0.191	0.977	0.147	0.982
	9	0.211	0.974	0.186	0.978	0.141	0.982
	10	0.208	0.975	0.181	0.978	0.137	0.983

Table S14: The ACWs (1^{st} column) and CPs (2^{nd} column) of 95% ACI/HPD intervals of $R(t)$ when $(T_1, T_2) = (0.4, 0.6)$.

n [FP%] Prior \rightarrow	Test	ACI		HPD			
				Pr.A		Pr.B	
40[50%]	1	0.319	0.956	0.306	0.960	0.297	0.965
	2	0.289	0.959	0.283	0.963	0.276	0.968
	3	0.278	0.961	0.270	0.965	0.266	0.969
	4	0.274	0.962	0.264	0.966	0.254	0.971
	5	0.266	0.963	0.255	0.967	0.243	0.973
40[75%]	6	0.262	0.964	0.249	0.968	0.231	0.974
	7	0.259	0.966	0.243	0.970	0.228	0.976
	8	0.251	0.967	0.235	0.971	0.219	0.977
	9	0.245	0.968	0.229	0.972	0.212	0.978
	10	0.239	0.969	0.222	0.973	0.205	0.979
80[50%]	1	0.233	0.970	0.216	0.973	0.199	0.979
	2	0.229	0.971	0.209	0.974	0.189	0.980
	3	0.220	0.971	0.202	0.974	0.177	0.982
	4	0.214	0.973	0.193	0.976	0.168	0.983
	5	0.207	0.974	0.181	0.977	0.155	0.984
80[75%]	6	0.200	0.975	0.175	0.978	0.149	0.985
	7	0.198	0.976	0.169	0.979	0.139	0.986
	8	0.196	0.977	0.161	0.980	0.128	0.987
	9	0.191	0.978	0.156	0.981	0.122	0.987
	10	0.185	0.980	0.145	0.982	0.117	0.988

Table S15: The ACWs (1^{st} column) and CPs (2^{nd} column) of 95% ACI/HPD intervals of $h(t)$ when $(T_1, T_2) = (0.2, 0.3)$.

n [FP%] Prior \rightarrow	Test	ACI		HPD			
				Pr.A		Pr.B	
40[50%]	1	0.465	0.946	0.416	0.950	0.369	0.954
	2	0.434	0.947	0.407	0.951	0.356	0.955
	3	0.413	0.949	0.388	0.953	0.338	0.957
	4	0.399	0.951	0.365	0.955	0.324	0.959
	5	0.385	0.953	0.359	0.956	0.316	0.960
40[75%]	6	0.376	0.954	0.352	0.958	0.300	0.963
	7	0.367	0.955	0.348	0.959	0.297	0.964
	8	0.356	0.956	0.335	0.960	0.288	0.965
	9	0.347	0.958	0.327	0.961	0.280	0.966
	10	0.336	0.960	0.321	0.961	0.276	0.967
80[50%]	1	0.324	0.962	0.316	0.963	0.273	0.967
	2	0.317	0.964	0.308	0.964	0.267	0.968
	3	0.315	0.965	0.305	0.967	0.257	0.971
	4	0.308	0.966	0.295	0.970	0.252	0.973
	5	0.290	0.968	0.283	0.972	0.249	0.975
80[75%]	6	0.283	0.970	0.279	0.974	0.242	0.976
	7	0.277	0.972	0.267	0.976	0.237	0.977
	8	0.264	0.974	0.259	0.977	0.231	0.980
	9	0.259	0.975	0.236	0.978	0.224	0.981
	10	0.252	0.976	0.228	0.979	0.213	0.982

Table S16: The ACWs (1^{st} column) and CPs (2^{nd} column) of 95% ACI/HPD intervals of $h(t)$ when $(T_1, T_2) = (0.4, 0.6)$.

n [FP%]	Test	ACI		HPD			
Prior \rightarrow				Pr.A		Pr.B	
40[50%]	1	0.436	0.948	0.399	0.953	0.357	0.956
	2	0.427	0.949	0.385	0.954	0.349	0.957
	3	0.404	0.951	0.367	0.956	0.326	0.960
	4	0.384	0.953	0.356	0.958	0.318	0.962
	5	0.376	0.955	0.342	0.959	0.311	0.963
40[75%]	6	0.365	0.956	0.337	0.961	0.296	0.965
	7	0.355	0.957	0.327	0.962	0.287	0.967
	8	0.349	0.958	0.308	0.963	0.282	0.967
	9	0.335	0.960	0.299	0.965	0.276	0.969
	10	0.324	0.962	0.289	0.967	0.270	0.971
80[50%]	1	0.319	0.963	0.278	0.968	0.263	0.972
	2	0.305	0.965	0.271	0.969	0.257	0.973
	3	0.294	0.967	0.267	0.972	0.249	0.974
	4	0.290	0.968	0.254	0.973	0.234	0.976
	5	0.285	0.971	0.244	0.975	0.228	0.978
80[75%]	6	0.278	0.972	0.238	0.976	0.219	0.980
	7	0.269	0.974	0.228	0.979	0.203	0.981
	8	0.261	0.976	0.213	0.980	0.196	0.982
	9	0.257	0.977	0.204	0.981	0.183	0.984
	10	0.248	0.978	0.197	0.982	0.178	0.985

Table S17: Properties of γ , σ , $R(t)$, and $h(t)$ from MFL data.

Sample	Par.	Mean	1st Quartile	Median	3rd Quartile	Mode	St.Dv.	Skew.
A	γ	2.35829	2.29317	2.35834	2.42333	2.21049	0.09747	0.01832
	σ	2.08365	2.01557	2.08279	2.15186	1.94248	0.09868	0.03659
	$R(0.35)$	0.71947	0.69653	0.72101	0.74377	0.66528	0.03394	-0.26095
	$h(0.35)$	4.64718	4.43658	4.64451	4.84842	4.68675	0.29493	0.09366
B	γ	2.24175	2.17419	2.24352	2.30414	2.21609	0.09662	0.00366
	σ	2.01480	1.94864	2.01670	2.08192	1.72647	0.10008	-0.02773
	$R(0.35)$	0.69183	0.66810	0.69435	0.71771	0.56705	0.03753	-0.38316
	$h(0.35)$	4.58804	4.39239	4.58441	4.78265	5.14531	0.28511	0.02482
C	γ	2.54119	2.47344	2.54302	2.60388	2.51516	0.09673	0.00021
	σ	1.90903	1.84248	1.91076	1.97601	1.62104	0.10004	-0.02593
	$R(0.35)$	0.65744	0.63063	0.66035	0.68676	0.51624	0.04246	-0.38427
	$h(0.35)$	5.41668	5.19803	5.41410	5.63304	6.04445	0.31442	0.00515
D	γ	2.50989	2.44204	2.51160	2.57258	2.48422	0.09688	0.00309
	σ	2.01902	1.95293	2.02099	2.08598	1.73044	0.09992	-0.02895
	$R(0.35)$	0.70017	0.67669	0.70275	0.72587	0.57542	0.03733	-0.39273
	$h(0.35)$	5.08040	4.86810	5.07609	5.28845	5.73120	0.30814	0.02734
E	γ	2.43981	2.37212	2.44160	2.50224	2.41402	0.09668	0.00338
	σ	2.10225	2.03600	2.10417	2.16931	1.81383	0.10010	-0.02851
	$R(0.35)$	0.72779	0.70651	0.73022	0.75114	0.61459	0.03394	-0.39181
	$h(0.35)$	4.74702	4.54088	4.74173	4.94804	5.38903	0.29777	0.04061

Table S18: Properties of γ , σ , $R(t)$, and $h(t)$ from MCs data.

Sample	Par.	Mean	1st Quartile	Median	3rd Quartile	Mode	St.Dv.	Skew.
A	γ	7.78724	7.78717	7.78724	7.78730	7.78699	0.00010	0.01892
	σ	1.00074	1.00067	1.00074	1.00081	1.00040	0.00010	-0.00322
	$R(0.1)$	0.46658	0.42877	0.46770	0.50587	0.26120	0.05705	-0.12980
	$h(0.1)$	30.6172	30.0503	30.6851	31.2536	29.0038	0.89636	-0.44850
B	γ	7.06917	7.06911	7.06917	7.06924	7.06890	0.00010	0.01247
	σ	1.00137	1.00130	1.00137	1.00143	1.00105	0.00010	0.01622
	$R(0.1)$	0.47384	0.45267	0.47423	0.49536	0.37076	0.03152	-0.05344
	$h(0.1)$	27.7437	27.4453	27.7619	28.0629	27.1811	0.45727	-0.25696
C	γ	7.06525	7.06518	7.06525	7.06532	7.06498	0.00010	0.01247
	σ	1.00136	1.00130	1.00136	1.00143	1.00105	0.00010	0.01622
	$R(0.1)$	0.47190	0.45077	0.47229	0.49338	0.36904	0.03146	-0.05282
	$h(0.1)$	27.7564	27.4606	27.7745	28.0728	27.1987	0.45324	-0.25739
D	γ	6.79754	6.79748	6.79754	6.79761	6.79728	0.00010	0.01247
	σ	1.00193	1.00186	1.00193	1.00200	1.00161	0.00010	0.01622
	$R(0.1)$	0.52614	0.50996	0.52641	0.54256	0.44753	0.02407	-0.04836
	$h(0.1)$	25.8920	25.6292	25.9030	26.1676	25.4040	0.39822	-0.18377
E	γ	5.48512	5.48506	5.48512	5.48519	5.48485	0.00010	0.01247
	σ	1.00729	1.00722	1.00729	1.00735	1.00697	0.00010	0.01622
	$R(0.1)$	0.64022	0.63546	0.64026	0.64500	0.61750	0.00705	-0.01349
	$h(0.1)$	19.0628	18.9710	19.0636	19.1558	18.8974	0.13643	-0.05617

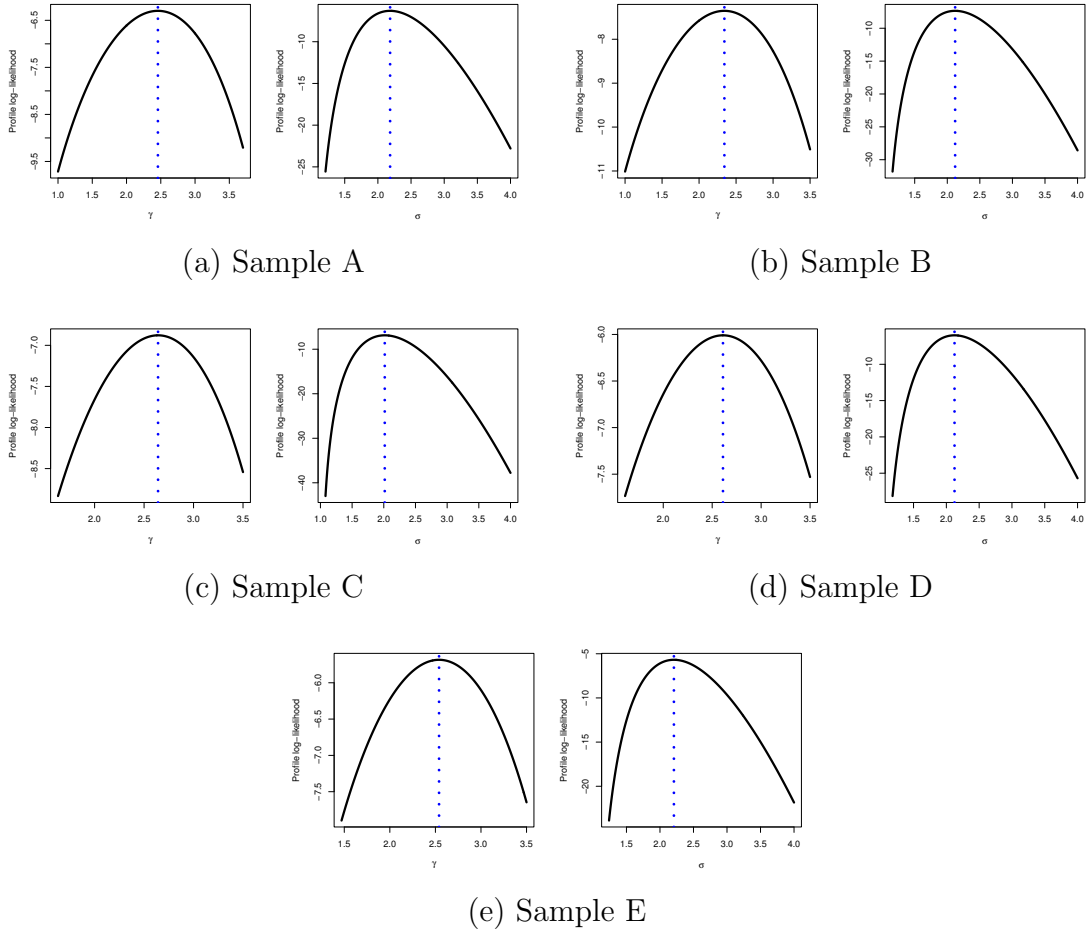


Figure S1: Profile log-likelihoods of γ (left) and σ (right) from MFL data.

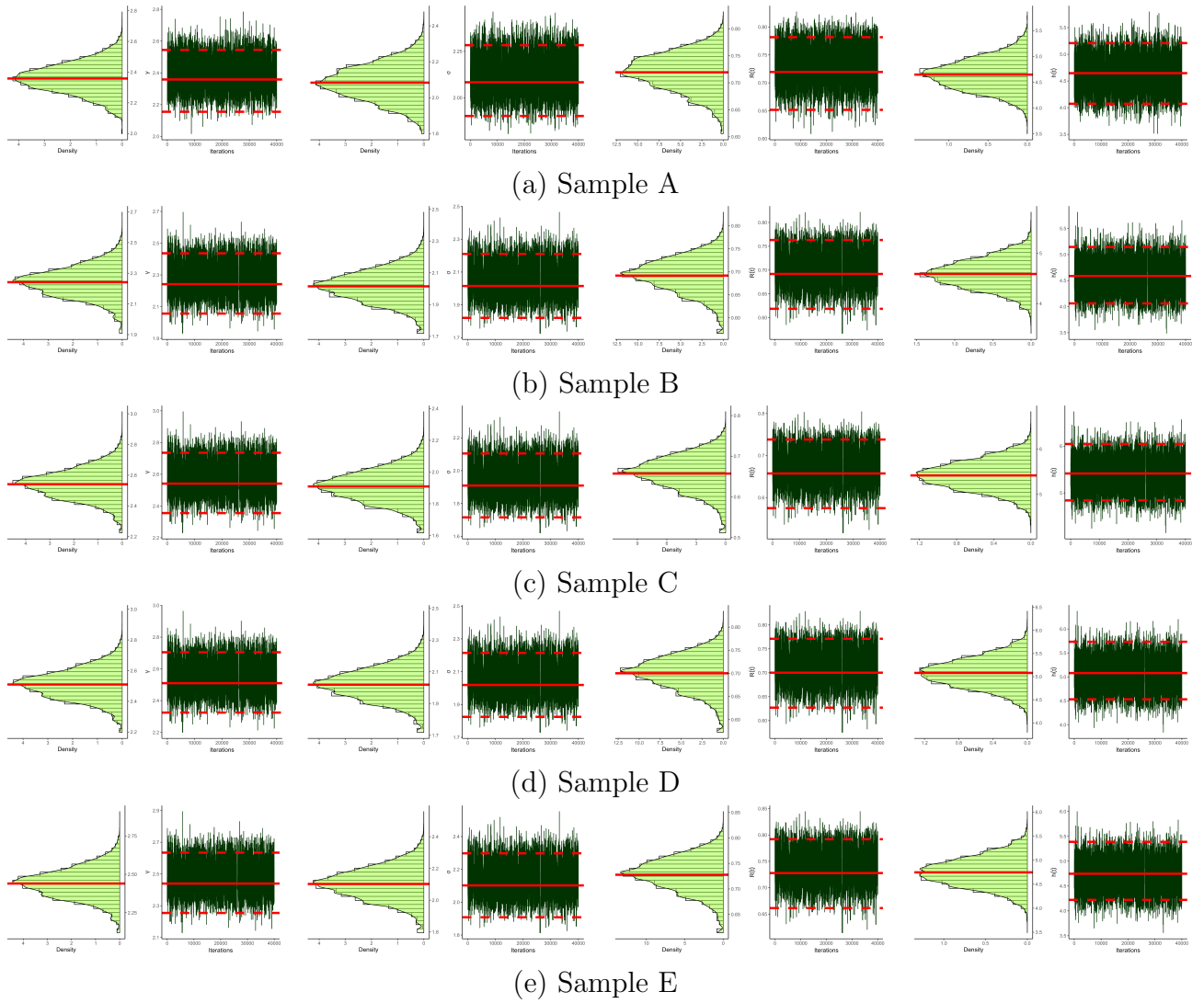
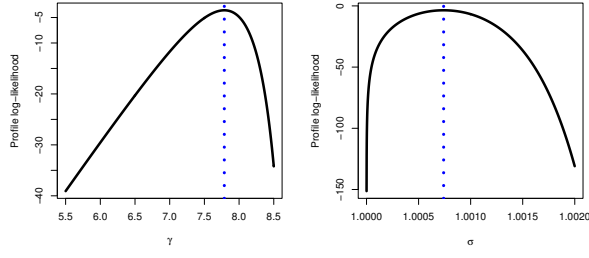
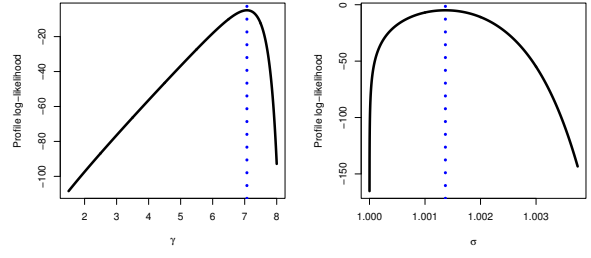


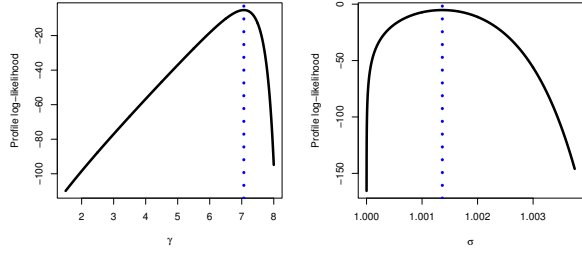
Figure S2: Density (left) and Trace (right) plots of γ , σ , $R(t)$, and $h(t)$ from MFL data.



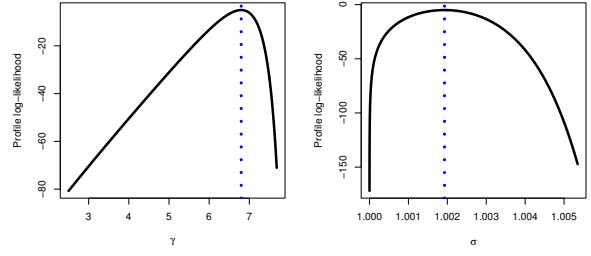
(a) Sample A



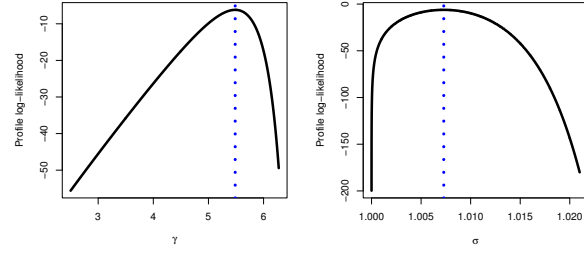
(b) Sample B



(c) Sample C



(d) Sample D



(e) Sample E

Figure S3: Profile log-likelihoods of γ (left) and σ (right) from MFL data.

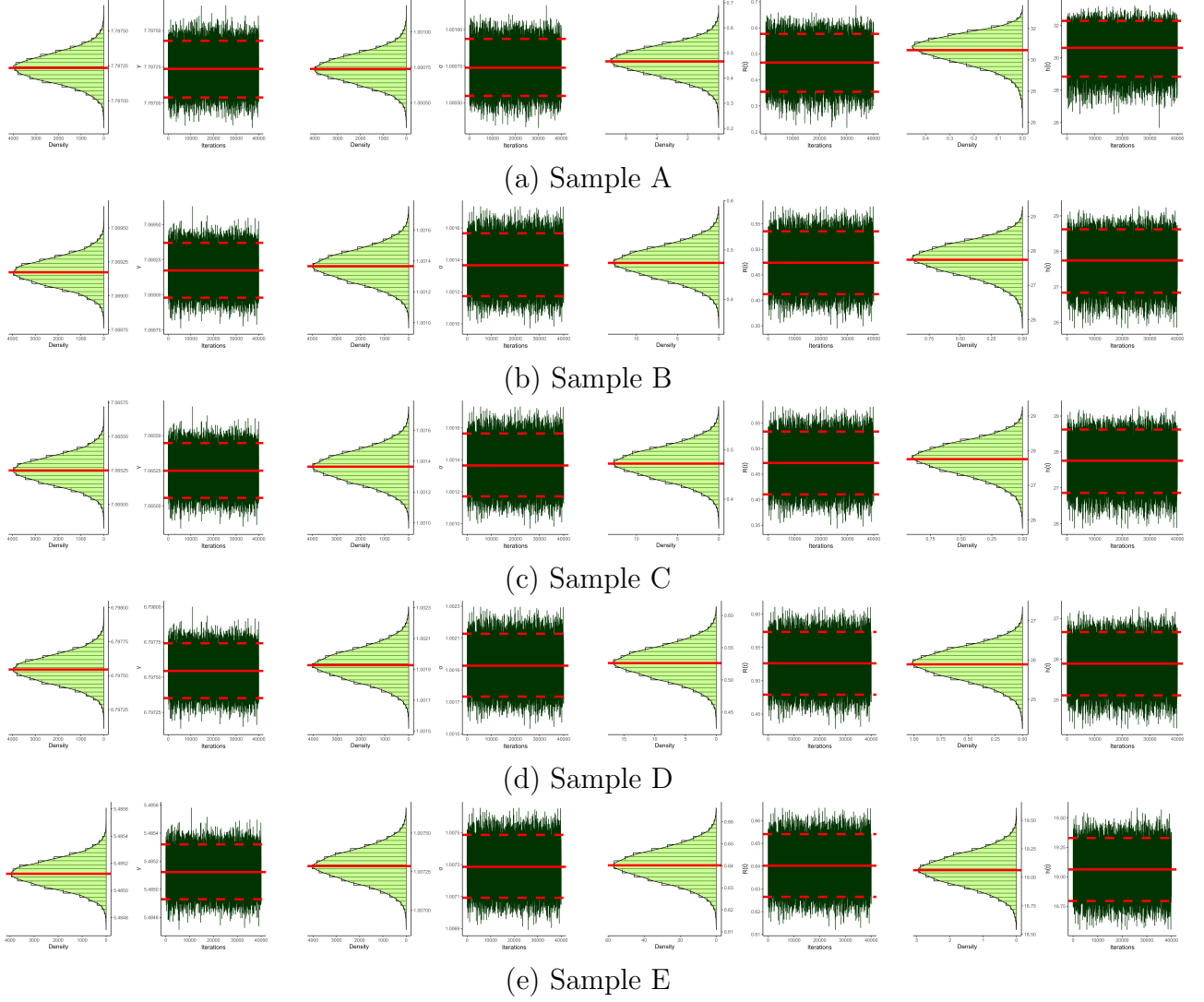


Figure S4: Density (left) and Trace (right) plots of γ , σ , $R(t)$, and $h(t)$ from MCs data.